Problema 1. (cl.XII) Fie $\zeta = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}$, unde $n \geq 2$ este un număr natural.

a) Scrieţi cu ajutorul lui ζ descompunerea în factori ireductibili în inelul $\mathbb{C}[X]$ a polinomului $f = X^{n-1} + X^{n-2} + ... + X + 1$.

b) Calculaţi produsele $P_1 = \prod_{k=1}^{n-1}\left(\zeta^k - \dfrac{1}{\zeta^k}\right)$, $P_2 = \prod_{k=1}^{n-1}\left(\zeta^k + \dfrac{1}{\zeta^k}\right)$.

Marcel Ţena, profesor, Bucureşti

Soluţie

a) Polinomul $X^n - 1 = (X-1)f$ are rădăcinile $1, \zeta, \zeta^2, ..., \zeta^{n-1}$, deci rădăcinile lui f sunt $\zeta, \zeta^2, ..., \zeta^{n-1}$. În inelul $\mathbb{C}[X]$ polinoamele ireductibile sunt cele de gradul 1, prin urmare descompunerea lui f în inelul $\mathbb{C}[X]$ în factori ireductibili este descompunerea sa în factori liniari:

$$f = \prod_{k=1}^{n-1}(X - \zeta^k).$$

3 puncte

b) $P_1 = \prod_{k=1}^{n-1}\dfrac{\zeta^{2k}-1}{\zeta^k} = \dfrac{\prod_{k=1}^{n-1}(\zeta^k - 1)\cdot\prod_{k=1}^{n-1}(\zeta^k+1)}{\prod_{k=1}^{n-1}\zeta^k} = \dfrac{(-1)^{n-1}f(1)(-1)^{n-1}f(-1)}{(-1)^{n-1}} =$

$$= (-1)^{n-1}\cdot n\cdot\frac{(-1)^n - 1}{(-1)-1} = \begin{cases} 0, \text{ dacă } n \equiv 0 \ (mod\ 2) \ (n \text{ par}) \\ n, \text{ dacă } n \equiv 1 \ (mod\ 2) \ (n \text{ impar}) \end{cases}$$

2 puncte

$$P_2 = \prod_{k=1}^{n-1}\frac{\zeta^{2k}+1}{\zeta^k} = \prod_{k=1}^{n-1}\frac{\zeta^{2k}-i^2}{\zeta^k} = \frac{\prod_{k=1}^{n-1}(\zeta^k - i)\cdot\prod_{k=1}^{-1}(\zeta^k+i)}{\prod_{k=1}^{n-1}\zeta^k} = \frac{(-1)^{n-1}f(i)(-1)^{n-1}f(-i)}{(-1)^{n-1}} =$$

$$= (-1)^{n-1}\cdot\frac{i^n-1}{i-1}\cdot\frac{(-i)^n-1}{-i-1} = \begin{cases} 0, \text{ dacă } n \equiv 0 \ (mod\ 4) \\ 1, \text{ dacă } n \equiv 1 \text{ sau } 3 \ (mod\ 4) \\ -2, \text{ dacă } n \equiv 2 \ (mod\ 4) \end{cases}$$

2 puncte